***Лекция 5. Дискретные случайные величины.***

### Вероятностный смысл математического ожидания – математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение случайной величины, т.е. приближенно равно ее среднему значению.

### Иногда знания этой характеристики достаточно для решения задачи.

### Например, при оценке покупательной способности населения вполне может хватить знания среднего дохода, при анализе выгодности двух видов деятельности можно ограничиться сравнением их средних прибыльностей. Знание того, что выпускники данного университета зарабатывают в среднем больше выпускников другого, может послужить основанием для принятия решения о поступлении в данный ВУЗ и т.п.

**ОПР. 1 Дискретной (прерывной)** случайной величиной называют случайную величину, которая принимает конечное или бесконечное (но счетное) число отдельных, изолированных возможных значений с определенными вероятностями.

Число студентов на лекции – дискретная случайная величина.

**ОПР. 2 Математическое ожидание** **дискретной** случайной величины определяется соотношением:

, где .

М ($х^{2}$)=$х\_{1}^{2}р\_{1}$+$ х\_{2}^{2}р\_{2}+х\_{3}^{2}р\_{3}$+……..

**ОПР. 3 Непрерывной случайной величиной** называют случайную величину, которая может принимать любые значения на числовом интервале.

Математическое ожидание **непрерывной** случайной величины равно

 

где  - плотность вероятности.

**Свойства математического ожидания**

Прежде чем формулировать свойства математического ожидания необходимо пояснить смысл арифметических операций , ,  и т.п., где  и  – дискретные случайные величины.

Например, под суммой  понимается случайная величина , значениями которой являются все допустимые суммы , где  и  – все возможные значения соответственно случайных величин  и .

***Свойства математического ожидания:***

1. Математическое ожидание постоянной величины  равно этой величине.

 .

1. Математическое ожидание суммы (разности) двух или нескольких случайных величин  и  равно сумме (разности) их математических ожиданий:

**.**

Следствие. Если  – постоянная величина, то



1. Математическое ожидание произведения двух **независимых** случайных величин  и  равно произведению их математических ожиданий:

**.**

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких **взаимно независимых** случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е..

### *Дисперсия случайной величины и ее свойства.*

На практике часто требуется оценить рассеяние случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, акции двух компаний могут приносить в среднем одинаковые дивиденды, однако вложение денег в одну из них может быть гораздо более рискованной операцией, чем в другую. Поэтому возникает необходимость в числовой характеристике, оценивающей разброс возможных значений случайной величины относительно ее среднего значения (математического ожидания). Такой характеристикой является **дисперсия**.

**Дисперсией** (рассеянием) случайной величины  называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.



или

**.**

В случае **дискретной** случайной величины, имеющей закон распределения  

.

Для **непрерывной** случайной величины формула для расчета дисперсии имеет вид

 

***Свойства дисперсии***

1.Дисперсия постоянной величины равна нулю.

 

2.Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

  **.**

3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

**.**

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Если  – постоянная величина, то .

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются ее основными числовыми характеристиками.

**Пример**. Пусть закон распределения дискретной случайной величины имеет вид

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,07 | 0,21 | 0,55 | 0,16 | 0,01 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

**Решение:** Рассчитаем вначале математическое ожидание



Дисперсия равна



**Пример**. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна

 , где 

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

**Решение**: Найдем математическое ожидание:



Далее,



Найдем дисперсию, используя формулу

 .

### *Среднее квадратическое отклонение.*

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

**Средним квадратическим отклонением**  (или стандартом) случайной величины  называется корень квадратный из дисперсии  этой величины:

.

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому размерность  совпадает с размерностью . В тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратичное отклонение, а не дисперсию.

Понятие дисперсии и среднего квадратического отклонения широко используется практически во всех областях человеческой деятельности, связанных с процессами измерений. Так, например, в технике, они характеризуют точность измерительной аппаратуры (чем выше среднеквадратическое отклонение (разброс) при измерениях, тем хуже качество прибора).

Примерами использования данных параметров в экономике могут служить изучение риска различных действий со случайным исходом, в частности, при анализе риска инвестирования в ту или иную отрасль, при оценивании различных активов в портфеле ценных бумаг и т.д.

**Пример.**

Пусть имеется два варианта инвестирования со следующими характеристиками



Ожидаемая чистая прибыль инвестирования определяется математическим ожиданием и составляет:

**Инвестиция 1:** 

**Инвестиция 2:**  

По ожидаемой прибыли предпочтительнее 1-й вариант. Однако мы не учли риск, связанный с инвестициями. Этот риск может быть определен с помощью дисперсии и (или) среднего квадратического отклонения. Используя результаты таблицы, получим

Инвестиция 1: 

Инвестиция 2: 

Т.е. риск по варианту для инвестиции 1 меньше. Выбор – за ЛПР.